УДК 681.5.015

А.Г. ГУРКО, канд. техн. наук, доц. ХНАДУ (г. Харьков)

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА НА МНОЖЕСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Введено понятие "дна" функции Ляпунова как прямой, которая делит пополам отрезки, заключенные внутри линий равного уровня функции Ляпунова и параллельные вектору коэффициентов, определяющих направление действующих на объект управления внешних воздействий. Доказано существование "дна" функции Ляпунова и найдено его уравнение. Показано, что приращение значения функции Ляпунова при перемещении произвольной точки от "дна" на любое расстояние по прямой, параллельной указанному вектору, постоянно. Ил.: 1. Библиогр.: 8 назв.

Ключевые слова: объект управления, функция Ляпунова, множество состояний.

Постановка проблемы. При решении задачи синтеза оптимального управления сталкиваются с проблемой отсутствия полной информации относительно внешних воздействий и текущего состояния объекта. Указанная недостаточность информации приводит к необходимости разработки методов синтеза оптимальных систем управления в условиях неопределенности.

Одним из динамично развивающихся подходов к синтезу оптимального управления в условиях неопределенности является синтез так называемого гарантированного управления, т.е. управления, минимизирующего некоторый функционал качества в предположении, что неопределенные факторы будут иметь самый неблагоприятный характер. Таким образом, задача синтеза сводится к минимаксной задаче из теории дифференциальных игр [1, 2]. При этом управление рассматривается как стратегия первого игрока, а действие неопределенных факторов – как стратегия игрока – противника. Достоинство такого подхода заключается в том, что он позволяет гарантировать приемлемое качество управления при любом сочетании неопределенных факторов. Кроме того, гарантированный подход основан на использовании относительно легко доступной информации о принадлежности всех неопределенных факторов некоторым ограниченным множествам.

Несмотря на значительное число публикаций, посвященных гарантированному управлению, в инженерной практике оно используется крайне редко. Это связано с тем, что большинство работ имеют общетеоретическую направленность и не учитывают тех особенностей, с которыми сталкивается проектировщик при разработке конкретных систем управления, а также со сложностью предлагаемых алгоритмов [3]. Следовательно, разработка новых относительно простых алгоритмов гарантированного управления является весьма актуальной задачей.

Анализ литературы. Одним из подходов к решению задачи оптимального управления в игровой ее постановке является подход, при котором гарантированная оценка параметров объекта ищется путем пересечения выпуклых многогранников, ограничивающих возможный диапазон изменения неопределенных факторов [4 – 6]. При этом в критериях качества может использоваться функция Ляпунова [4, 7].

Пусть динамика объекта описывается дискретным, в общем случае нелинейным, векторным разностным уравнением

$$\mathbf{X}(n+1) = F(\mathbf{X}(n), \mathbf{U}(n), \mathbf{\Lambda}(n), n),\ \mathbf{X}(n_0) = n_0,\ n = n_0, n_0+1, \ldots, \tag{1}$$

где $\mathbf{X}$ – вектор координат состояния объекта; $\mathbf{U}$ – вектор управляющих воздействий; $\mathbf{\Lambda}$ – вектор внешних неконтролируемых возмущений; n – моменты квантования по времени; $F(\cdot)$ – заданная вектор-функция.

Управление $\mathbf{U}(n)$ формируется на основе измерений координат состояния, результатом которых является вектор

$$\mathbf{Y}(n) = \Phi(\mathbf{X}(n), \mathbf{\Psi}(n), n), \tag{2}$$

где $\mathbf{\Psi}$ – вектор помех измерения; $\Phi(\cdot)$ – заданная вектор-функция.

В [4] в качестве цели управления предложено использовать функцию удельных потерь ω

$$\omega\big(\mathbf{X}(n), \mathbf{U}(n), \mathbf{\Lambda}(n), n\big) = V\big(\mathbf{X}(n+1), n\big) + \tilde{\omega}\big(\mathbf{X}(n), \mathbf{U}(n), n\big), \tag{3}$$

где $V(\cdot)$ – функция Ляпунова; $\tilde{\omega}(\cdot)$ – заданная функция, которая, например, может определять затраты на реализацию управлений и задавать ограничения на их величину.

Иными словами, задача синтеза заключается в решении следующей задачи

$$\min_{\mathbf{U}(n)\in\Omega_{\mathrm{U}}(n)} \max_{\mathbf{\Lambda}(n)\in\Omega_{\Lambda}(n)} \max_{\mathbf{\Psi}(n)\in\Omega_{\Psi}(n)} \left\{\omega\big(\mathbf{X}(n), \mathbf{U}(n), \mathbf{\Lambda}(n), n\big)\right\}, \tag{4}$$

где $\Omega_{\mathrm{U}}(n)$, $\Omega_{\Lambda}(n)$, $\Omega_{\Psi}(n)$ – заданные выпуклые множества.

В [8] рассмотрена процедура синтеза гарантированного управления объектов в виде апериодического звена 2-го порядка. При этом решение задачи (4) осуществлялось поисковым методом. Однако поисковые методы не гарантируют определения оптимального управления за конечное время, поэтому необходима разработка алгоритма беспоискового построения оптимального управления. Поскольку задача (4), по сути, сводится к задаче поиска минимума функции Ляпунова, то представляет интерес исследование свойств функции Ляпунова при движении объекта под действием внешних (управляющих и возмущающих) воздействий.

Цель статьи – изучение свойств функции Ляпунова в пространстве состояний. Результаты решения этой проблемы позволят резко минимизировать объем вычислений при определении оптимального управления.

Понятие "дна" функции Ляпунова. Пусть модель объекта приведена к виду

$$\mathbf{X}(n + 1) = \mathbf{AX}(n) + \mathbf{B}((\mathbf{U}(n) + \mathbf{\Lambda}(n)), \tag{5}$$

т.е. рассмотрим случай, когда внешнее возмущение непосредственно "подмешивается" в управляющее воздействие. Для простоты примем, что объект управления имеет второй порядок.

Функция Ляпунова для рассматриваемой задачи представляет собой квадратичную положительно-определенную функцию координат состояния:

$$V = \mathbf{X}^T\mathbf{PX}, \tag{6}$$

где T – операция транспонирования; $\mathbf{P}$ – симметричная положительно определенная матрица (2×2), которая находится из уравнения Риккати

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_c \\ p_c & p_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^T . \tag{7}$$

Рассмотрим некоторые свойства функции Ляпунова при движениях по направлениям, параллельным вектору $\mathbf{B} = (b_1,b_2)^T$ в уравнении объекта (5).

Прямые, параллельные вектору $\mathbf{B}$, описываются уравнениями

$$b_2X_1 - b_1X_2 + C = 0, \tag{8}$$

где C – произвольное число.

Найдем точки пересечения прямых (8) с поверхностями равного уровня функции Ляпунова V, которые описываются уравнением

$$p_{11}X_1^2 + 2p_cX_1X_2 + p_{22}X_2^2 - V_x = 0 , \tag{9}$$

где V_x – некоторое положительное число.

Координаты точек пересечения прямой (8) с линиями равного уровня функции Ляпунова определяет совместное решение (8) и (9). Выразим из (8) X_2

$$X_2 = \frac{X_1b_2 + C}{b_1} , \tag{10}$$

отсюда

$$X_1^2\left(p_{11} + 2p_c\frac{b_2}{b_1} + p_{22}\frac{b_2^2}{b_1^2}\right) + X_1\left(2p_c\frac{C}{b_1} + 2p_{22}\frac{b_2C}{b_1^2}\right) + p_{22}\frac{C^2}{b_1^2} - V_x = 0 . \tag{11}$$

Введем обозначения: $T_0 = p_{11} + 2p_c\frac{b_2}{b_1} + p_{22}\frac{b_2^2}{b_1^2}$, $T_1 = 2p_c\frac{C}{b_1} + 2p_{22}C\frac{b_2}{b_1^2}$,

$T_2 = p_{22}\frac{C^2}{b_1^2} - V_x$. Тогда из (11) получим

$$X_1 = -\frac{T_1}{2T_0} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4T_0^2} - \frac{T_2}{T_0}} . \tag{12}$$

Аналогично находится и выражение для X_2

$$X_2 = -\frac{T_1'}{2T_0'} \pm \sqrt{\frac{T_1'^2}{4T_0'^2} - \frac{T_2'}{T_0'}}\,, \tag{13}$$

где $T_0' = p_{22} + 2p_c \frac{b_1}{b_2} + p_{11}\frac{b_1^2}{b_2^2}$; $T_1' = -\left(2p_c \frac{C}{b_2} + 2p_{11}C\frac{b_1}{b_2^2}\right)$; $T_2' = p_{11}\frac{C^2}{b_2^2} - V_x$.

Анализ выражений (12) и (13) показывает, что первые слагаемые этих выражений определяют центр $X_{ср}$ отрезка, образованного пересечением прямой (8) с поверхностью равного уровня (9) (рис.). Получим выражение для $X_{ср}$ в явном виде

$$X_{1cp} = -\frac{T_1}{2T_0} = -C\frac{p_c b_1 + p_{22}b_2}{p_{11}b_1^2 + 2p_c b_1 b_2 + p_{22}b_2^2} = -C\frac{p_c b_1 + p_{22}b_2}{\mathbf{B}^T\mathbf{PB}}\,, \tag{14}$$

$$X_{2cp} = -\frac{T_1'}{2T_0'} = C\frac{p_{11}b_1 + p_c b_2}{p_{11}b_1^2 + 2p_c b_1 b_2 + p_{22}b_2^2} = C\frac{p_{11}b_1 + p_c b_2}{\mathbf{B}^T\mathbf{PB}}\,. \tag{15}$$

Поскольку прямых (8) может быть сколь угодно много, то с изменением значения C, точки $X_{ср}$ с координатами (14) и (15) представляют собой геометрическое место центров отрезков, образованных пересечением прямых (8) с поверхностью равного уровня (9), и образуют как бы "дно" функции Ляпунова.

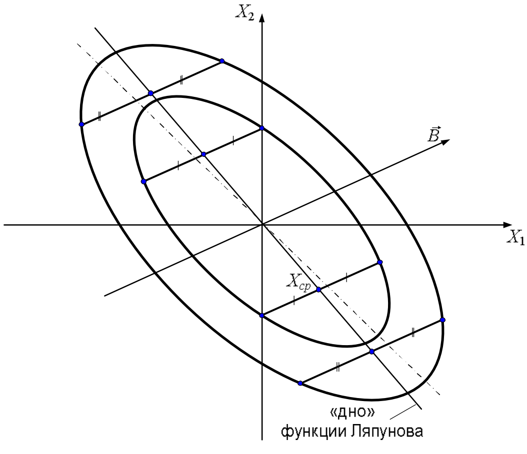

Рис. К определению "дна" функции Ляпунова

Таким образом, "дном" функции Ляпунова будем называть такую прямую (если она существует), которая делит пополам отрезки прямых, параллельных вектору **B** в уравнении (5) и заключенные внутри границы $V_x = \text{const}$ при $\text{const} > 0$. При этом следует отметить, что "дно" в общем случае не совпадает с геометрической осью поверхности равного уровня.

Найдем отношение $X_{2\text{ср}}/X_{1\text{ср}}$

$$\frac{X_{2\text{ср}}}{X_{1\text{ср}}} = -\frac{p_{11}b_1 + p_c b_2}{p_c b_1 + p_{22} b_2}. \qquad (16)$$

Уравнение (16) представляет собой уравнение "дна" функции Ляпунова V, причем (16) не зависит от C, т.е. "дно" функции Ляпунова существует.

Поскольку матрица $\mathbf{P}$ – симметричная квадратная матрица, то уравнение "дна" можно записать следующим образом

$$(\mathbf{PB})^T\mathbf{X} = 0 \text{ или } \mathbf{X}^T(\mathbf{PB}) = 0. \qquad (17)$$

Свойства "дна" функции Ляпунова. Поскольку оптимальное управление $\mathbf{U}(n)$ и внешние возмущения $\mathbf{\Lambda}(n)$ смещают область возможных состояний объекта в направлении, определяемом вектором $\mathbf{B}$ в правой части уравнения (5), то рассмотрим приращение $dV(l)$ значения функции Ляпунова при перемещении контрольной точки от "дна" по прямой (8) на расстояние l. Обозначим для краткости координаты точки пересечения прямой (8) с "дном" функции Ляпунова через X_{10} и X_{20}. Воспользуемся формулами (9) и (10)

$$V = p_{11}(X_{10} + l_1)^2 + 2p_c(X_{10} + l_1)\frac{(X_{10} + l_1)b_2 + C}{b_1} + p_{22}\frac{\left((X_{10} + l_1)b_2 + C\right)^2}{b_1^2}. \qquad (18)$$

После преобразований формуле (18) можно придать следующий вид

$$V = C^2\frac{\mathbf{S}^T\mathbf{HS}}{(\mathbf{B}^T\mathbf{PB})^2} + l^2\frac{\mathbf{B}^T\mathbf{PB}}{b_1^2 + b_2^2}, \qquad (19)$$

где $\mathbf{S}^T = (p_c b_1 + p_{22} b_2,\ p_{11} b_1 + p_c b_2)$; $\mathbf{H}$ – матрица $\mathbf{P}$ с измененным на обратный знаком p_c.

Первое слагаемое в (19) определяет значение функции Ляпунова на "дне" и не зависит от l. Второе слагаемое показывает зависимость приращения $dV(l)$ при перемещении точки от "дна" по прямой (8) на расстояние l. Формула (19) показывает, что зависимость $dV(l)$ постоянна при перемещении по любой прямой (8). Но базовые значения V_0 на "дне" функции Ляпунова, естественно, различны.

Определим теперь, какой вид имеет формула для V в точке пересечения прямой (8) и прямой, параллельной "дну" функции Ляпунова

$$(\mathbf{PB})^T\mathbf{X} + Z = 0,$$

где $Z = \text{const}$.

С использованием формулы (19) и формулы

$$l = \frac{Z\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{\mathbf{B}^T\mathbf{PB}},$$

искомой формуле можно придать следующий компактный вид

$$V = C^2 \frac{\mathbf{S}^T \mathbf{HS}}{(\mathbf{B}^T \mathbf{PB})^2} + \frac{Z^2}{\mathbf{B}^T \mathbf{PB}}.$$

Выводы. Уравнение "дна" функции Ляпунова при движениях по прямым линиям, параллельным вектору **B**, представляет собой прямую линию. Центры отрезков, образованных пересечением этой линий с поверхностями равного уровня $V = V_x$ располагаются на "дне" функции Ляпунова, т.е. "дно" делит рассматриваемые отрезки пополам. При этом приращение значения функции Ляпунова при перемещении произвольной точки от "дна" на любое расстояние l по прямой, параллельной вектору **B**, постоянно.

Список литературы: 1. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений / *Красовский Н.Н.* – М.: Наука, 1970. – 473 с. **2.** *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности / *А.Б. Куржанский.* – М.: Наука, 1977. – 392 с. **3.** *Кейн В.М.* Оптимизация систем управления по минимаксному критерию / *В.М. Кейн* – М.: Наука, 1985. – 248 с. **4.** *Кунцевич В.М.* Синтез оптимальных и адаптивных систем управления. Игровой подход / *В.М. Кунцевич, М.М. Лычак.* – К.: Наукова думка, 1985. – 248 с. **5.** *Лычак М.М.* Множественная фильтрация / *М.М. Лычак* // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 5 – С. 63–76. **6.** *Лычак М.М.* Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода / *М.М. Лычак* // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 5 – С. 34–41. **7.** *Кунцевич В.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / *В.М. Кунцевич, М.М. Лычак.* – М.: Наука, 1977. – 400 с. **8.** *Еременко И.Ф.* Реализация игрового подхода к управлению линейными объектами второго порядка / *И.Ф. Еременко, А.Г. Гурко* // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 5 – С. 13–24.

Статья представлена д.т.н. проф. ХНАДУ Алексеевым О.П.

УДК 681.5.015

Деякі властивості функції Ляпунова на множині станів / Гурко О.Г. // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2010. – № 21. – С. 46 – 51.

Введено поняття "дна" функції Ляпунова як прямої, що ділить навпіл відрізки, укладені всередині ліній однакового рівня функції Ляпунова та паралельні вектору коефіцієнтів, які визначають напрямок діючих на об'єкт керування зовнішніх впливів. Доведено існування "дна" функції Ляпунова та знайдено його рівняння. Показано, що приріст значення функції Ляпунова при переміщенні довільної точки від "дна" на будь-яку відстань по прямій, що паралельна вказаному вектору, постійний. Іл.: 1. Бібліогр.: 8 назв.

Ключові слова: об'єкт керування, функція Ляпунова, множина станів.

UDC 681.5.015

Some properties of Lyapunov function at set of states /Gurko A.G. // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2010. – №. 21. – P. 46 – 51.

The concept of a "bottom" of Lyapunov function is introduced. A "bottom" of Lyapunov function is a straight line, which divided into equal parts the segments of lines placed between the lines of equal level of Lyapunov function and parallel to the vector of coefficients that determine the direction of acting of external influences at the control object. The existence of the "bottom" of Lyapunov function is proved and its equation is obtained. It is shown that the increment of value of Lyapunov function when an arbitrary point transferences along the lines of referred above vector, constantly. Figs: 1. Refs: 8 titles.

Key words: control object, Lyapunov function, state space.

Поступила в редакцию 10.10.2009